

УДК 621.726

DOI 10.17073/1997-308X-2015-1-32-37

Прогнозирование эффективных модулей упругости пористых композиционных материалов

© 2015 г. **А.Ф. Федотов**

Самарский государственный технический университет (СамГТУ)

Статья поступила в редакцию 17.03.14 г., доработана 16.04.14 г., подписана в печать 21.04.14 г.

Федотов А.Ф. — докт. техн. наук, профессор кафедры механики СамГТУ (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244).
Тел.: (846) 332-42-33. E-mail: a.fedotov50@mail.ru.

Изложен метод расчета эффективных упругих модулей пористых композиционных материалов. Его отличительная особенность заключается в расчете упругих модулей композиционной твердой фазы через эффективные объемы осреднения деформаций компонентов. Приведены аналитические зависимости для расчета эффективных объемов осреднения деформаций твердой фазы и ее компонентов. Результаты расчета макроскопического модуля Юнга пористых композитов находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

Ключевые слова: пористый композит, упругие модули, объем осреднения.

A method for computing effective elastic moduli of porous composite materials is described. Its distinctive feature is in the calculation of elastic moduli of the composite solid phase through efficient volumes of averaging deformations of the solid phase and its components. The results of calculation of the macroscopic Young modulus of porous composites are in good agreement with the experimental data.

Keywords: porous composite, elastic moduli, averaging volume.

Введение

Развитие современных отраслей промышленности во многом связано с разработкой и применением различных композиционных материалов, в том числе и пористых. Достоверная количественная оценка физико-механических, в частности упругих, свойств является одним из факторов обеспечения эксплуатационной надежности элементов конструкций из пористых материалов. При прогнозировании макроскопических или эффективных свойств пористых композитов последовательно решаются две задачи. Сначала определяются эффективные свойства многокомпонентной твердой фазы. Затем рассчитываются эффективные свойства собственно пористого материала. При этом пористые материалы рассматривают как двухфазные композиты с нулевыми материальными константами одной из фаз.

Известные методы механики микронеоднородных сред [1–4] не позволяют с высокой точностью описать упругие свойства композитов с произвольным содержанием и сильным отличием модулей упругости компонентов. Особенно

это относится к пористым материалам, которые имеют максимально возможное отличие свойств компонентов. Асимптотический метод усреднения [5] позволяет точно рассчитать эффективные свойства композитов при любом различии свойств и любой геометрии компонентов. Однако «платой» за точность является сложность математического аппарата и проводимых построений, и этот метод доступен лишь небольшому числу специалистов. Численный метод конечных элементов дает возможность создать трехмерную представительную ячейку, отражающую реальную гетерогенную структуру, и с высокой точностью описать механические свойства композита. Однако при создании трехмерной структурной модели и ее дискретизации необходимо разрабатывать сложное программное обеспечение или использовать коммерческие программные комплексы, например «Ansys».

В работах [6, 7] разработан математически простой метод расчета эффективных механических свойств изотропных композитов. Его от-

личительная особенность заключается в расчете свойств композитов через эффективные объемы осреднения деформаций компонентов. Последнее определяют из решения краевой задачи деформирования представительной ячейки двухфазного композита с рассмотрением варианта деформирования пористого материала. Тем самым учитывается случай предельно возможного отличия фазовых характеристик и максимальной концентрации деформаций в компонентах композита. В работе [6] в приближении плоской поверхности раздела фаз получены аналитические зависимости для расчета эффективных модулей сдвига и объемного сжатия. Результаты расчета по модели [6] находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

В настоящей работе рассматривается расчет методом эффективных объемов осреднения упругих постоянных пористых композитов.

Упругие постоянные в методе эффективных объемов осреднения деформаций

Для расчета упругих постоянных пористых материалов с композитной твердой фазой используются такие же зависимости и соотношения, что и для материалов с однородной по составу твердой фазой. При этом вместо гетерогенной твердой фазы рассматривается эквивалентная гомогенная твердая фаза с эффективными свойствами. Эффективные упругие постоянные гетерогенной твердой фазы будем определять методом эффективных объемов осреднения деформаций.

Упругие свойства изотропных материалов характеризуются двумя независимыми константами. В качестве базовых констант примем модуль Юнга и модуль сдвига. Ограничимся рассмотрением пористых композитов с двухкомпонентной твердой фазой. Эффективные свойства композитов с числом компонентов больше двух находятся путем последовательного приведения многокомпонентной композиции к бинарной. Через коэффициенты концентрации средних деформаций эффективный модуль Юнга (E_0) двухкомпонентной твердой фазы, состоящей также из изотропных компонентов, определится следующим образом [8]:

$$E_0 = c_1 E_1 K_{\varepsilon 1} + c_2 E_2 K_{\varepsilon 2}, \quad (1)$$

где E_1, E_2 — модули Юнга компонентов; c_1, c_2 — объемные доли компонентов; $K_{\varepsilon 1}, K_{\varepsilon 2}$ — коэффициенты концентрации средних деформаций одноосного растяжения ε_x .

Коэффициенты концентрации средних деформаций представляют собой отношение средних по объемам компонентов (V_k) деформаций растяжения $\langle \varepsilon_x \rangle_{V_k}$ к средним деформациям растяжения $\langle \varepsilon_x \rangle_V$ в объеме композита (V):

$$K_{\varepsilon k} = \frac{\langle \varepsilon_x \rangle_{V_k}}{\langle \varepsilon_x \rangle_V}. \quad (2)$$

Здесь и далее нижний индекс k характеризует различные компоненты ($k = 1, 2$).

Средние деформации $\langle \varepsilon_x \rangle_{V_k}$ и $\langle \varepsilon_x \rangle_V$ вычисляются путем осреднения микроскопических деформаций ε'_x по соответствующим объемам:

$$\langle \varepsilon_x \rangle_{V_k} = \frac{1}{V_k} \int_{V_k} \varepsilon'_x dV, \quad \langle \varepsilon_x \rangle_V = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon'_x dV. \quad (3)$$

Каждый компонент в средней деформации композита $\langle \varepsilon_x \rangle_V$ имеет свою эффективную долю и соответствующий эффективный объем $V_{\alpha k}$. Тогда суммарную деформацию в объеме композита V можно представить в виде суммы усредненной деформации композита $\langle \varepsilon_x \rangle_V$ в объемах $V_{\alpha k}$:

$$\langle \varepsilon_x \rangle_V V = \langle \varepsilon_x \rangle_V V_{\alpha 1} + \langle \varepsilon_x \rangle_V V_{\alpha 2}. \quad (4)$$

Из условия однозначности суммы деформаций в объеме компонента следует, что сумма средней деформации растяжения композита $\langle \varepsilon_x \rangle_V$ в эффективных объемах осреднения компонентов $V_{\alpha k}$ будет равна сумме средних деформаций растяжения $\langle \varepsilon_x \rangle_{V_k}$ в объемах компонентов V_k :

$$\langle \varepsilon_x \rangle_V V_{\alpha k} = \langle \varepsilon_x \rangle_{V_k} V_k. \quad (5)$$

Из зависимости (5) получим

$$\langle \varepsilon_x \rangle_{V_k} = \frac{V_{\alpha k}}{V_k} \langle \varepsilon_x \rangle_V = \frac{\alpha_{\varepsilon k}}{c_k} \langle \varepsilon_x \rangle_V, \quad (6)$$

где $\alpha_{\varepsilon k} = V_{\alpha k}/V$ — доля эффективного объема осреднения деформаций растяжения k -го компонента. Из сравнения зависимостей (2) и (5) следует, что коэффициенты концентрации $K_{\varepsilon k}$ будут равны

$$K_{\varepsilon k} = \alpha_{\varepsilon k} / c_k. \quad (7)$$

После подстановки (7) в (1) имеем

$$E_0 = \alpha_{\varepsilon 1} E_1 + \alpha_{\varepsilon 2} E_2. \quad (8)$$

По аналогии с зависимостью (8) для модуля сдвига твердой фазы можно записать

$$\mu_0 = \alpha_{\gamma 1} \mu_1 + \alpha_{\gamma 2} \mu_2, \quad (9)$$

где μ_1, μ_2 — модули сдвига компонентов; $\alpha_{\gamma k}$ — доли эффективных объемов осреднения деформаций сдвига k -го компонента. Доли эффективных объемов осреднения деформаций в (8) и (9) связаны соотношениями [6]

$$\alpha_{\varepsilon 1} + \alpha_{\varepsilon 2} = 1, \quad \alpha_{\gamma 1} + \alpha_{\gamma 2} = 1. \quad (10)$$

Зависимости (8) и (9) по структуре соответствуют известному соотношению Фойгта. В отличие от модели Фойгта в предлагаемой модели вместо объемных долей компонентов используются доли эффективных объемов осреднения. Количественно доли эффективных объемов осреднения деформаций представляют собой отношение суммы деформаций растяжения или сдвига в объеме соответствующего компонента к сумме деформаций растяжения или сдвига в объеме композита [6].

Пористый материал представляет собой двухфазный композит, состоящий из твердой фазы и пор. Поры имеют нулевые значения модулей упругости. Тогда на основании (8) и (9) для эффективных модулей Юнга (E) и сдвига (μ) пористого композита получим

$$E = \alpha_t E_0, \quad \mu = \alpha_s \mu_0, \quad (11)$$

где α_t, α_s — доли эффективных объемов осреднения деформаций растяжения и сдвига твердой фазы. В механике пористых материалов эффективные объемы осреднения α_t и α_s известны как функции пористости или относительной плотности. В дальнейшем параметры α_t и α_s также будем называть функциями пористости.

При расчете модулей упругости пористого материала потребуется вычислять коэффициент Пуассона композитной твердой фазы. Эффективный коэффициент Пуассона равен отношению средней поперечной деформации $\langle \varepsilon_y \rangle_V$ к средней продольной деформации $\langle \varepsilon_x \rangle_V$ твердой фазы композита:

$$v_0 = -\frac{\langle \varepsilon_y \rangle_V}{\langle \varepsilon_x \rangle_V}. \quad (12)$$

После операции осреднения продольная $\langle \varepsilon_x \rangle_V$ и поперечная $\langle \varepsilon_y \rangle_V$ деформации распределены по объему твердой фазы однородно. По определению деформации в эффективных объемах осреднения равны соответствующим средним деформациям композита:

$$\varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} = \langle \varepsilon_x \rangle_V, \quad \varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y2} = \langle \varepsilon_y \rangle_V. \quad (13)$$

С учетом (13) и (10) средние деформации выразим через доли эффективных объемов осреднения:

$$\langle \varepsilon_x \rangle_V = \varepsilon_{x1} \alpha_1 + \varepsilon_{x2} \alpha_2, \quad \langle \varepsilon_y \rangle_V = \varepsilon_{y1} \alpha_{y1} + \varepsilon_{y2} \alpha_{y2} \quad (14)$$

и для коэффициента Пуассона получим

$$v_0 = -\frac{\varepsilon_{y1} \alpha_{y1} + \varepsilon_{y2} \alpha_{y2}}{\varepsilon_{x1} \alpha_{\varepsilon 1} + \varepsilon_{x2} \alpha_{\varepsilon 2}}, \quad (15)$$

где α_{y1}, α_{y2} — доли эффективных объемов осреднения поперечных деформаций, для которых также выполняется условие (10). В (15) поперечная деформация ε_{yk} связана с продольной деформацией ε_{xk} законом Пуассона: $\varepsilon_{yk} = -v_k \varepsilon_{xk}$. Выражая ε_{xk} через ε_{yk} , после преобразований с учетом соотношений (10) и (13) получим следующую зависимость для расчета коэффициента Пуассона композитной твердой фазы:

$$v_0 = \frac{v_1 v_2}{v_1 \alpha_{\varepsilon 2} + v_2 \alpha_{\varepsilon 1}}. \quad (16)$$

Эффективные объемы осреднения и функции пористости

Эффективные объемы осреднения деформаций находят из решения краевой задачи упругого деформирования представительной ячейки композита. Для гипотетического случая плоской границы раздела фаз получены следующие аналитические зависимости эффективных объемов осреднения деформаций [6]:

$$\alpha_1 = \alpha_{01} + (1 - \alpha_{01} - \alpha_{02}) \frac{E_2}{E_2 - E_1} \left(1 - \frac{E_1}{E_2 - E_1} \ln \frac{E_2}{E_1} \right), \quad (17)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{02} + (1 - \alpha_{01} - \alpha_{02}) \frac{E_1}{E_2 - E_1} \left(\frac{E_2}{E_2 - E_1} \ln \frac{E_2}{E_1} - 1 \right).$$

Здесь α_{01}, α_{02} — эффективные объемы осреднения деформаций, или функции пористости условно пористой твердой фазы композита [6]. При расче-

те модуля Юнга рассматриваются эффективные объемы осреднения деформаций растяжения: $\alpha_1 = \alpha_{\varepsilon 1}$, $\alpha_2 = \alpha_{\varepsilon 2}$. В качестве параметров α_{01} и α_{02} используются функции пористости при растяжении: $\alpha_{01} = \alpha_{t1}$, $\alpha_{02} = \alpha_{t2}$. При расчете модуля сдвига определяются эффективные объемы осреднения деформаций сдвига: $\alpha_1 = \alpha_{\gamma 1}$, $\alpha_2 = \alpha_{\gamma 2}$. Параметрами α_{01} и α_{02} являются функции пористости при сдвиге: $\alpha_{01} = \alpha_{s1}$, $\alpha_{02} = \alpha_{s2}$. Таким образом, эффективные объемы осреднения деформаций $\alpha_{\varepsilon k}$ и $\alpha_{\gamma k}$ определяются через функции пористости α_t и α_s .

В научной литературе для расчета модулей упругости пористых материалов приводятся различные функции пористости. С высокой точностью упругие свойства порошков и спеченных пористых материалов описываются модифицированной зависимостью Бальшина [9, 10]:

$$\alpha_s = \rho^n \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0}, \quad n = \frac{2 - \rho - \rho_0}{1 - \rho_0}, \quad (18)$$

где ρ — относительная плотность; ρ_0 — начальная (насыпная) относительная плотность порошка. Относительная плотность ρ связана с пористостью θ соотношением $\rho = 1 - \theta$.

Выразим функцию пористости при растяжении (α_t) через функцию пористости при сдвиге (α_s). Для этого воспользуемся зависимостью для макроскопического модуля объемного сжатия K пористого материала [9, 10]:

$$K = \frac{4}{3} \mu_0 \frac{(1 + \nu_0) \alpha_s}{2(1 - 2\nu_0) + (1 + \nu_0)(1 - \alpha_s)} \quad (19)$$

и уравнениями связи модуля Юнга с модулями сдвига и объемного сжатия:

$$E_0 = \frac{9K_0\mu_0}{3K_0 + \mu_0}, \quad E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}. \quad (20)$$

После преобразований получим

$$\alpha_t = \frac{6\alpha_s}{6 + (1 + \nu_0)(1 - \alpha_s)}. \quad (21)$$

Функция пористости при сдвиге (α_s) выражается через функцию пористости при растяжении (α_t) следующим образом:

$$\alpha_s = \frac{(7 + \nu_0)\alpha_t}{6 + (1 + \nu_0)\alpha_t}. \quad (22)$$

При расчете в зависимости (17) функций по-

ристости α_{01} и α_{02} вместо относительной плотности ρ рассматривается объемная доля ее компонентов c_k . Начальная объемная доля компонентов принимается равной нулю: $c_{k0} = 0$.

Эффективные модули упругости пористого композита рассчитываются следующим образом. Сначала по зависимостям (17) вычисляются эффективные объемы осреднения деформаций. При расчете модуля сдвига в (17) принимается:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{\gamma 1}, & \alpha_{01} &= \alpha_{t1} = c_1^{3-c_1}, \\ \alpha_2 &= \alpha_{\gamma 2}, & \alpha_{02} &= \alpha_{t2} = c_2^{3-c_2}. \end{aligned} \quad (23)$$

При расчете модуля Юнга рассматриваются параметры деформации растяжения:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_{\varepsilon 1}, & \alpha_{01} &= \alpha_{s1} = \frac{6\alpha_{t1}}{6 + (1 + \nu_1)(1 - \alpha_{t1})}, \\ \alpha_2 &= \alpha_{\varepsilon 2}, & \alpha_{02} &= \alpha_{s2} = \frac{6\alpha_{t2}}{6 + (1 + \nu_2)(1 - \alpha_{t2})}, \end{aligned} \quad (24)$$

где ν_1, ν_2 — коэффициенты Пуассона компонентов композитной твердой фазы.

При известных значениях эффективных объемов осреднения деформаций по зависимостям (8) и (9) определяются эффективные модули упругости композитной твердой фазы E_0 и μ_0 . Затем по зависимостям (11) рассчитываются искомые эффективные модули упругости пористого композита. При этом в зависимостях (18) и (21) функций пористости α_s и α_t используется относительная плотность ρ , а в зависимости (21) — эффективный коэффициент Пуассона, рассчитанный по формуле (16).

Тестовые расчеты эффективного модуля Юнга

Проверку точности предлагаемого метода выполняли по экспериментальным данным упругих свойств пористых двухфазных композитов. Следует отметить, что число публикаций, в которых приводятся надежные результаты экспериментальных исследований влияния пористости на упругие постоянные композитов, весьма ограничено.

На рис. 1 приведены расчетные и экспериментальные зависимости модуля Юнга пористого псевдосплава Fe—Cu в зависимости от объемного

содержания железа при значениях пористости $\theta = 0,15$ и $0,25$. Опытные данные взяты из работы [11] и имеют очень большой разброс значений экспериментальных точек, обусловленный суще-

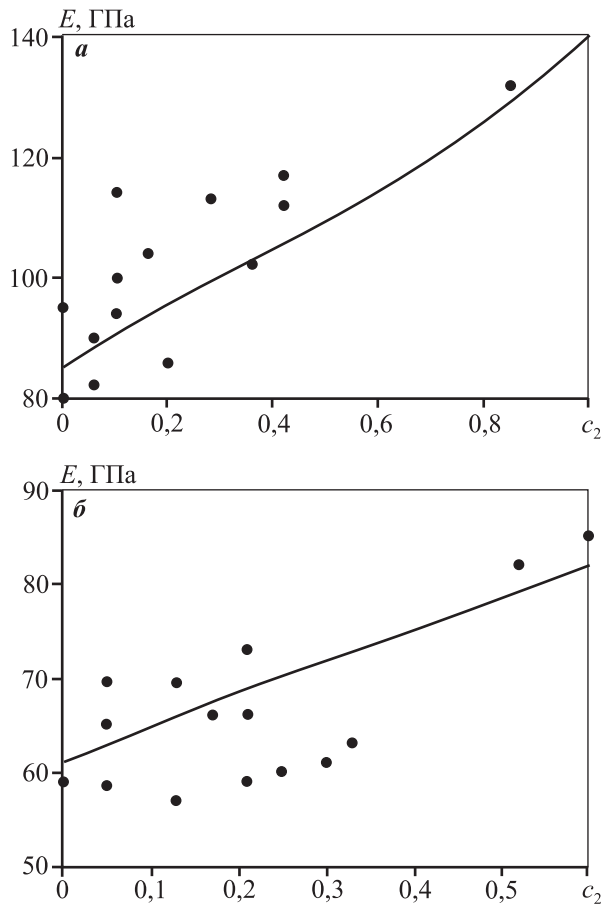


Рис. 1. Результаты расчета модуля Юнга пористого псевдосплава Fe—Cu при пористости $\theta = 0,15$ (а) и $0,25$ (б)

Точки — эксперимент [11]

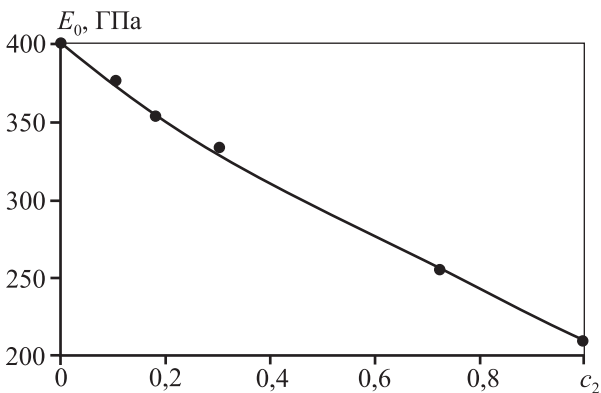


Рис. 2. Результаты расчета модуля Юнга спеченного композита $\text{Al}_2\text{O}_3\text{—ZrO}_2$

Точки — эксперимент [14]

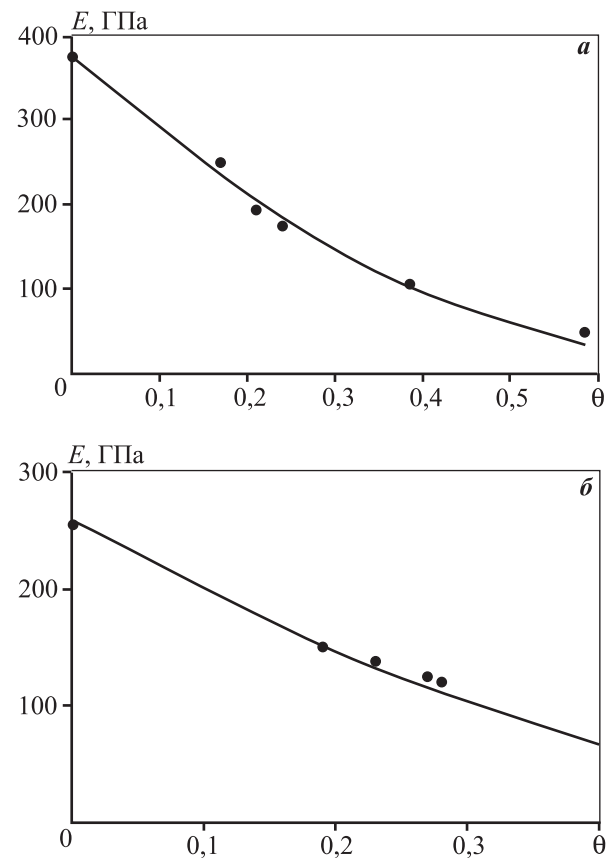


Рис. 3. Результаты расчета модуля Юнга пористого спеченного композита $\text{Al}_2\text{O}_3\text{—}10,5\text{об.}\% \text{ZrO}_2$ (а) и $\text{Al}_2\text{O}_3\text{—}72,6\text{об.}\% \text{ZrO}_2$ (б)

Точки — эксперимент [14]

твенной неоднородностью структуры образцов. Компонентом 1 считали медь, компонентом 2 — железо. Модули Юнга принимали следующими [12]: $E_1 = 129$ ГПа, $E_2 = 211$ ГПа; коэффициенты Пуассона [13]: $\nu_1 = 0,28$, $\nu_2 = 0,34$. С учетом большого разброса экспериментальных данных результаты расчета показывают вполне приемлемую точность (см. рис. 1).

Более точные экспериментальные данные получены в работе [14] для спеченного двухфазного композита $\text{Al}_2\text{O}_3\text{—ZrO}_2$. При расчетах компонентом 1 считали оксид алюминия Al_2O_3 , компонентом 2 — диоксид циркония ZrO_2 . Принимали следующие значения упругих постоянных [14]: $E_1 = 400$ ГПа, $\nu_1 = 0,23$ для Al_2O_3 и $E_2 = 210$ ГПа, $\nu_2 = 0,31$ для ZrO_2 . Сначала была рассчитана зависимость эффективного модуля Юнга (E_0) композита $\text{Al}_2\text{O}_3\text{—ZrO}_2$ от объемного содержания диоксида циркония (c_2). Результаты расчета с высокой точ-

ностью описывают экспериментальные данные (рис. 2).

Затем были выполнены расчеты эффективного модуля Юнга пористых композитов состава Al_2O_3 —10,5об.% ZrO_2 и Al_2O_3 —72,6об.% ZrO_2 с различной пористостью. Здесь также результаты расчета находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными (рис. 3).

Таким образом, предлагаемый метод и расчетные зависимости позволяют достаточно точно описать упругие свойства как композитной твердой фазы, так и пористых композитов.

Заключение

Для расчета макроскопических упругих модулей пористых композиционных материалов могут быть использованы такие же зависимости, что и для пористых материалов с однородной по составу твердой фазой. При этом гетерогенная твердая фаза заменяется на эквивалентную гомогенную твердую фазу с эффективными модулями упругости. Расчет эффективных модулей упругости композитной твердой фазы может быть выполнен методом эффективных объемов осреднения деформаций компонентов. Расчетные зависимости эффективных объемов осреднения через функции пористости учитывают вариант деформирования пористых материалов и, следовательно, максимально возможное отличие свойств компонентов композиционного материала. Предлагаемые зависимости функций пористости и эффективных объемов осреднения деформаций позволяют

адекватно описать эффективный модуль Юнга как композитной твердой фазы, так и пористых композитов.

Литература

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микroneоднородных сред. М.: Наука, 1977.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.
3. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наук. думка, 1985.
4. Дульнев Г.Н., Новиков В.В. Процессы переноса в неоднородных средах. Л.: Энергоатомиздат, 1991.
5. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
6. Федотов А.Ф. // Механика композ. материалов и конструкций. 2011. Т. 17, № 1. С. 3.
7. Федотов А.Ф. // Там же. 2012. Т. 18, № 4. С. 508.
8. Сендецки Дж. // Композиционные материалы. Механика композиционных материалов. Т. 2. М.: Мир, 1978. С. 61—101.
9. Федотов А.Ф. // Изв. вузов. Порошк. металлургия и функц. покрытия. 2010. № 4. С. 19.
10. Fedotov A.F. // Powder Metall. Metal Ceram. 2011. Vol. 50, № 5—6. P. 301.
11. Поляков В.В., Егоров А.В., Турецкий В.А. // Изв. АГУ. 2004. № 1. С. 119.
12. Свойства элементов. Ч. 1. Физические свойства: Справочник. М.: Металлургия, 1976.
13. Бернштейн М.Л., Займовский В.А. Механические свойства металлов. М.: Металлургия, 1979.
14. Pabst W., Ticha G., Gregorova E., Tynova E. // Ceramics — Silikáty. 2005. Vol. 49, № 2. P. 77.